高 数 期 中 ＝ 套 公 式

——基于历年中国传媒大学高等数学期中考试试卷的复习笔记

Part3 DEs（微分方程）

§3.1 微分方程的基础定义

- **Differential Equations (DEs)**（微分方程） 含有未知函数及其导数的等式。
- **System of DEs**（微分方程组） 存在两个或多个未知函数。
- **Ordinary Differential Equation (ODE)**（常微分方程） 未知函数是一元的（仅有一个变量）。
- **Partial Differential Equation (PDE)**（偏微分方程） 未知函数是二元及以上的。
- **Order**（阶） 最高阶导数的阶数。
- **Linear vs. Nonlinear**（线性与非线性） y 是线性方程若
    - 未知函数和其导数只以线性的形式出现，不与其他函数相乘除或作为其他函数的参数；
    - 满足 $g(y_1+y_2)=g(y_1)+g(y_2)$；
    - 可化为 $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y+r(x)=0$，其中 $a_j(x), 0\le j\le n$ 为系数；
    - 例如，$y''+xy'+\sin(x)y=\mathrm{e}^x$ 就是线性的，而 $y''+x\sin(y')-xy=x^2$ 则是非线性的。
- **Solution**（解）：一个函数 $y=y(x)$ 是解，若代入后满足 ODE 函数。
- **General Solution**（通解）：（一般）包含所有的解，因此应该含有一个常数项，一个特例是 $y^2+(y')^2=1$ 的通解是 $y=\sin(x+C)$，这个通解不包含 $y=1$ 这个特解，它称为奇解。
- **Particular Solution**（特解）：若给定一些初始条件，那么就是一个 Initial-Value Problem（初值问题），这时解就是特解。

§3.2 First Order Differential Equations（一阶微分方程）

§3.2.1 Type-I: Separable ODE（可分常微分方程）

一阶微分方程是 可分 的，若可写成

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

解 若 $g(y), f(x)$ 是连续的，将两边同时求积分，得 (3.1) 的通解

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

（其中 C 是常数，下同）。

注意 对于形如 $y' = f(x)g(y)$ 的方程，需按 $g(y) \neq 0$ 及 $g(y) = 0$ 两种情况讨论。

---

§3.2.2 Type-II: First-order Linear ODE（一阶线性常微分方程）

一阶线性 **ODE**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + py = q \tag{3.2}$$

思路 构造 Integrating factor $I = \mathrm{e}^{\int p \mathrm{d}x}$，借其性质 $I' = Ip$，将不可分方程转化为可分方程。

解 置 $I = \mathrm{e}^{\int p \mathrm{d}x}$，则

$$\begin{aligned} Iq &= I\left(y' + py\right) \\ &= Iy' + I'y \\ &= (Iy)' \end{aligned}$$

两边同时积分，得 (3.2) 的通解

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{I}(Iq\mathrm{d}x + C) \\ &= \mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x} q\mathrm{d}x + C\right] \end{aligned}$$

另解 解一阶齐次线性方程 $y' + py = 0$，得 $y = C\mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x}$，使用 常数变易法，一阶非齐次线性方程具有结构（其中 u 是关于 x 的函数 $u(x)$）

$$y = u\mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x}$$

将它代入 (3.2)，化简并解出

$$u = \int \mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x} q\mathrm{d}x + C$$

再代回即得通解。

> 例 求解 $y' - \frac{1}{5}y = 5 - x$。
>
> 解 因 $p(x) = \frac{1}{5}$，$q(x) = 5 - x$，置 $I(x) = e^{\int -\frac{1}{5}\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$，答案是 $y(x) = 5x + C\mathrm{e}^{\frac{x}{5}}$。

---

§3.2.3 Type-III: Bernoulli's Equations（伯努利方程）

$n\ (n \neq 0, 1)$ 阶 伯努利方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n \tag{3.3}$$

思路 以 $u = y^{1-n}$ 换元，将式子变成一个关于 u 的线性 ODE，再用可分常微分方程和一阶线性常微分方程方法求解新的 ODE。

解 原式等价于

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

置 $u = y^{1-n}$，依 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即 $y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{1-n}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 得

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + p(x)u(x) = q(x).$$

将它看做一阶 ODE：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \underbrace{(1-n)p(x)}_{P(x)}u(x) = \underbrace{(1-n)q(x)}_{Q(x)}$，有

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \mathrm{e}^{-(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}\left[(1-n)\int q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] \\
\Longrightarrow y^{1-n} &= \mathrm{e}^{-(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}\left[(1-n)\int q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right].
\end{aligned}
$$

---

§3.2.6 Type-VI: Homogeneous DE（齐次微分方程）

一阶微分方程是齐次的，若可写成

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.6}
$$

解 置 $u = \dfrac{y}{x}$，则

$$
u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = F(u),
$$

此即可分 ODE，(3.6) 的通解为

$$
\int \frac{\mathrm{d}u}{F(u) - u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.
$$

---

§3.2.7 Type-VII: Reducible Second-order DE（可降阶的二阶微分方程）

二阶 ODE：

$$
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)
$$

它包含三个变量 $x, y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，不可以直接求解。但若二阶 ODE 仅包含了两个变量，我们可降阶成一阶，再依前文提到的方法求解。

Type-VI-A 包含 $x, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即形如

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = F\Big(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big) \tag{3.7.1}$$

解 置 $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则 (3.7.1) 等价于

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(x, v).$$

解之。

Type-VI-B 包含 $y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即形如

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = F\Big(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big) \tag{3.7.2}$$

解 置 $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，依 chain rule 有 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，则 (3.7.2) 等价于

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = F(y, v).$$

§3.3.3 Homogeneous DE: Constant Coefficients（系数为常数齐次微分方程）

形如

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a \neq 0)$$

考虑 $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$，代入给定 DE，得 $ar^2\mathrm{e}^{rx} + br\mathrm{e}^{rx} + c\mathrm{e}^{rx} = 0$，即 $ar^2 + br + c = 0$，解出 r_1, r_2，即得通解（注意 r 允许为虚数，$\mathrm{e}^{(\alpha\pm\mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x \pm \mathrm{i}\sin\beta x)$）

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{r_1x} + C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

若特征方程只有一个根 $r = -\dfrac{b}{2a}$，那么一个解为 $y_1 = \mathrm{e}^{rx}$，由上节知另一个解为 $y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$，故通解

$$y(x) = (C_1 + xC_2)\mathrm{e}^{r_1x}.$$

§3.2.5 Theory for Linear Nonhomogeneuous DE

非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \neq 0 \tag{5.1}$$

的通解形如

$$y(x) = y_p(x) + \underbrace{c_1y_1(x) + c_2y_2(x)}_{y_c(x)} \tag{5.2}$$

其中 $y^*(x)$ 是特解 (Particular Solution)，因此有 $y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = f(x)$；而 $y_c(x)$ 部分则是（5.1）对应的齐次方程的通解，即 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的通解，$y_c(x)$ 被称为（5.1）的余函数（Complementary Function）。因此，求解齐次方程的重点其实就是如何找到一个特解，下面我们给出两种方法

Method of Undetermined Coefficients 待定系数法

待定系数法是最简单的方法。本方法仅限用于对系数为常数的线性 ODE 求 $y^*(x)$ 的情况，形如

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

其中 $f(x)$ 为一些特定的函数。

（$P_m(x), Q_m(x)$ 等均表示关于 x 的 m 阶多项式）

$f(x) = P_m(x)e^{\mu x}$：选取 $y^* = x^kR_m(x)e^{\mu x}$，其中 k 是特征方程的根中 μ 的重复次数。

$f(x) = (P_{m_1}(x)\cos\omega x + Q_{m_2}(x)\sin\omega x)e^{\mu x}$：选取 $y^* = x^k(R_{\max(m_1,m_2)}(x)\cos\omega x + S_{\max(m_1,m_2)}(x)\sin\omega x)e^{\mu x}$，其中 k 是特征方程的根中 $\mu + \mathrm{i}\omega$ 的重复次数。

Part2 微积分

§2.4 平面点集、多元函数、二元函数的极限和连续性

§2.4.1 平面点集

一、平面点集 $\boldsymbol{E}$

平面上的点 P 可以用一有序实数对 (x,y) 唯一表示。

两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 间的距离 $d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，满足正定性和三角不等式。

平面上满足某条件 T 的点的集合称为平面点集，记作 $E=\{P\mid P\,\text{satisfies}\,T\}$，如

- 全平面 $\mathbb{R}^2=\big\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\big\}$；
- 圆 $C=\big\{(x,y)\mid (x-a)^2+(x-b)^2<r^2\big\}$；
- 矩形 $S=\big\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\big\}=[a,b]\times[c,d]$。

平面点列 $\{P_n\}$ 是特殊的平面点集。

二、邻域

- 一维去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$。
- 圆邻域 $U(P,\delta)=\{x\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta\}$；

  去心圆邻域 $\overset{\circ}{U}(P,\delta)=\{x\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta,(x,y)\neq(x_0,y_0)\}$；
- 方邻域 $U(P,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}$，

  去心方邻域 $\overset{\circ}{U}(P,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta,(x,y)\neq(x_0,y_0)\}$，

  因任一圆邻域都可以包含于某一方邻域，反之亦然，所以圆邻域与方邻域一般不加区分，或曰 方邻域与圆邻域等价。

三、点与点集的关系

1. 按点 P 在 E 的内外分：
    - 内点 $\exists\delta>0,\ \text{s.t.}\ U(P,\delta)\subset E$；
    - 外点 $\exists\delta>0,\ \text{s.t.}\ U(P,\delta)\cap E=\varnothing$；
    - 边界点 $\forall\delta>0, U(P,\delta)\cap E\neq\varnothing\wedge U(P,\delta)\subset E^c$（$P$ 点的任意邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点），其中 $E^c=\mathbb{R}^2\backslash E$ 为余集，全体边界点的全体构成 E 的 边界 ∂E。
2. 按点 P 的近旁是否聚集 E 的无穷多个点分：
    - 聚点 $\forall\delta>0,\ U(P,\delta)\subset E$，或 $\forall\delta>0,\ N(P_0,\delta)\cap E$ 是一个无穷集，或存在互异的点列 $\{P_n\}\subset E$ 使 $P_n\to P_0,\ n\to\infty$；
    - 孤立点 $\forall\delta>0, U(P,\delta)\cap E=\varnothing$；

   孤立点—界点，内点—聚点，非孤立的界点—聚点；
   既不是聚点又不是孤立点的点—外点；
   边界点—孤立点或聚点，可以属于 E（闭集），也可以不属于 E（开集）；
   聚点可以属于 E，也可以不属于 E；

四、点集

1. 开集 每一点都是内点，即无边界点；
   闭集 所有聚点都属于 E（可包括孤立点），或 只有孤立点；
   不开也不闭的点集；
   既开又闭的点集（$\varnothing$ 和 $\mathbb{R}^2$）。
2. 区域 在各教材中的定义不同，同济高数中的定义特指开区域；
   开区域 连通（若 E 中任意两点都可以用完全属于 E 的有限条直线段连接起来）的开集；
   闭区域 开区域和所有边界；
   半开半闭区域 开区域和部分边界。
3. 有界集
    - $\exists U(O,\delta)\supseteq E$
    - $\exists D=[a,b]\times[c,d]\supseteq E$
    - E 的 直径 $d(E)=\sup\limits_{P_1,P_2\in E}\rho(P_1,P_2)$ 为有限值；

   无界集 $\forall U(O,\delta)\not\supset E$。

§2.4.2 二元函数的极限（二重极限）

设 f 为定义在 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数，P_0 为 D 的一个聚点，A 是一个确定的实数，若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, such that $\forall p \in N_\circ(P_0, \delta) \cap D$, 有 $|f(P) - A| < \varepsilon$，则称 A 为 f 在 D 上当 $P \to P_0$ 时的极限，记作 $\lim_{P \to P_0} f(P) = A$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0 y \to y_0} f(x,y) = A$ 或 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$。等价描述：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall |x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta \wedge (x,y) \neq (x_0,y_0),\ \text{有}\ |f(x,y) - A| < \varepsilon$$

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$，则对于定义域内任意一条趋向于点 (x_0, y_0) 的路径 c，都有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in c}} f(x,y) = A$$

因此，如果能找到两条不同的路径，极限不相同，则表明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在。

> 例 函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 当 $(x,y) \to (0,0)$ 时的极限。
>
> 解 置 $P(x,y)$ 沿 $y = kx (k \neq 0)$ 趋于 $(0,0)$，得极限值为 $\dfrac{k}{k^2+1}$，其随 k 的变化而变化，因此极限不存在。
>
> (2022) 极限 $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$ 不存在。
>
> 思路 取一些数引出矛盾就能证明。构造题要大胆尝试，如取 $y = x$ 和 $y = x^2 - x$ 。

§2.4.3 二元函数的连续性

关于连续性、间断点等的定义不再赘述，如在 (x_0, y_0) 连续即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，亦满足曾学的性质，如无穷大无穷小、初等函数连续性等。

一元连续函数看成二元函数时仍是连续的。

> 求 $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$。
>
> 解

> $$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} y \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} \lim_{(x,y)\to(0,2)} y \\ &= \lim_{xy\to 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \lim_{y\to 2} y \\ &= 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

§2.5 多元函数的微分

§2.5.1 可微性

一、全微分

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，对于 $U(P_0)$ 中的点 $P(x,y)=(x+\Delta x, y+\Delta y)$，在点 P_0 处的

- 全增量 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$，
- 全微分 $\mathrm{d}z|_{x=x_0,y=y_0} = A\Delta x + B\Delta y$，若 $\exists A, B$，s.t. $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$。

二、偏导数

若二元函数在 P_0 处可微，令 $\Delta y \equiv 0$，在点 P_0 处关于 x 的

- 偏增量 $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$，
- 偏微分 $A\Delta x$。

将多元函数的微分问题变成熟悉的一元函数微分。

邻域内有定义、极限存在时，在点 (x_0,y_0) 关于 x 的

- 偏导数：$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}。$$

> 根据一元函数微分和导数的关系，将偏增量 $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$ 中 Δx 除到等式的右边 $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$，当 $\Delta x \to 0$ 时，得到偏导数 $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha) = A$。

> (2022) 设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2 y}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$，求 $f_x(0,1)$。
>
> 思路 即求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(0+\Delta x,1)-f(0,1)}{\Delta x}$，代入即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} = 1$。

三、可微的条件

可微的必要条件 若二元函数 f 在其定义域内一点 (x,y) 可微，则在该点关于每个自变量的偏导数都存在，且全微分

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

可微的充分条件 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在点 (x_0,y_0) 的某邻域上存在，且 f_x 与 f_y 在点 (x_0,y_0) 连续，则函数在点 (x_0,y_0) 可微。

- 各个偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续、偏导数存在；
- 偏导数存在 $\nRightarrow$ 连续、可微（与一元不同）；
- 可微 $\nRightarrow$ 各个偏导数连续；
- 连续 $\nRightarrow$ 偏导数存在，可微。

> 例 **1**(2019) 按定义证明 $z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时偏导数存在，但不连续。
>
> 证明 (1) 由
>
> $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x} = 0$$
>
> 知关于 x 的偏导数存在，同理关于 y 的亦存在。
>
> (2) 置 $P(x,y)$ 沿 $y=kx(k\neq 0)$ 趋于 $(0,0)$，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} z = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot kx}{(x)^2 \cdot (kx)^2} = \frac{k}{k^2+1}$$

其随 k 的变化而变化，因此当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在，故不连续。

例 **2** 按定义证明 $z = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时偏导数存在，但不可微。

证明 (1) 易知偏导数存在，且 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$。

(2) 用反证法证明不可微，假设有 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中 $A = f_x(0,0)=0, B=f_y(0,0)=0$，即 $\Delta z = o(\rho)$，有

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho} = 0,$$

而当点 $(\Delta x, \Delta y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于点 $(0,0)$ 时，$\Delta x = \Delta y$，此时

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho} &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \\
&= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

产生了矛盾，故不可微。

例 **3** 按定义证明 $z = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时可微，但偏导数不连续。

证明 略。

例 **4** 按定义证明 $z=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 处不可微。

证明 易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$。

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - A\Delta x + B\Delta y}{\rho} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{(\sqrt{|\Delta x\Delta y|}-0) - 0\Delta x - 0\Delta y}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{|\rho\sin\theta\cdot\rho\cos\theta|}}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0}\sqrt{|\sin\theta\cos\theta|}
\end{aligned}$$

> 不存在，故不可微。

§2.5.2 偏导函数与求偏导法则

一、偏导函数

求偏导数，把其他自变量看作常数，化为一元函数的求导问题。

二、复合函数的偏导数

若函数 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，$z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 可微，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 (x,y) 可微，且关于自变量 x 与 y 的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

一般地，若 $f(u_1,\cdots,u_m)$ 在点 $(u_1,\cdots,u_m)$ 可微，
$u_k=g_k(x_1,\cdots,x_n)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 在点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 具有关于 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数，则复合函数 $f(g_1(x_1,\cdots,x_n),g_2(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,\cdots,x_n))$ 关于自变量 x_i 的偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

三、复合函数的全微分

若以 x 和 y 为自变量的函数 $z=f(x,y)$ 可微，则

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

若函数 $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$ 在点 (s,t) 可微，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial s}\,\mathrm{d}s+\frac{\partial z}{\partial t}\,\mathrm{d}t\\
&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial x}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

是为 全微分形式不变性。

> (2011) 设 $y=2x, f(x,y)=x^2+3x, f_x(x,y)=6x+1$，求 $f_y(x,y)$。
>
> 解 对 $f(x,y)=x^2+3x$ 等式两边求全微分，即 $f_x(x,y)+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}f_y(x,y)=2x+3$ ，代入即得。

四、高阶偏导

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)&=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)&=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)&=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)
\end{aligned}$$

混合偏导与求导顺序无关，即

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

> (2022) 设 $z=f(xe^y,x,y)$，且 f 具有二阶连续的偏导数，求 $\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}$。
>
> 析 熟悉记号 f_1', f_{12}'' 等的含义，并注意 $\dfrac{\partial}{\partial x}f_1'$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 的关系。

解

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= f_1'\frac{\partial}{\partial x}xe^y + f_2'\frac{\partial}{\partial x}x + f_3'\frac{\partial}{\partial x}y \\
&= e^y f_1' + f_2' \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= f_1'\frac{\partial}{\partial y}xe^y + f_2'\frac{\partial}{\partial y}x + f_3'\frac{\partial}{\partial y}y \\
&= xe^y f_1' + f_3' \\
\frac{\partial z^2}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y f_1' + f_3'\right) \\
&= xe^y \frac{\partial}{\partial x} f_1' + e^y f_1' + \frac{\partial}{\partial x} f_3' \\
&= xe^y \left(e^y f_{11}'' + f_{21}''\right) + e^y f_1' + \left(e^y f_{13}'' + f_{23}''\right) \\
&= xe^{2y} f_{11}' + xe^y f_{21}'' + e^y f_1' + e^y f_{13}'' + f_{23}''
\end{aligned}
$$

五、隐函数求导法则

设方程 $F(x,y)=0$，若隐函数 $y=f(x)$ 存在且可导，有

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}}
$$

推广到多个变元有类似的式子；推广到方程组即：

对于 $F(x,y,u,v)=0, G(x,y,u,v)=0$，有

$$
\begin{cases}
F_x + F_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\
\\
G_y + G_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0
\end{cases}
$$

在 $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$ 的条件下，解出

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = -\dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} \\
\\
\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}
\end{cases}
$$

> (2022) 设 $z=z(x,y)$ 由 $F\left(x+\dfrac{z}{y}, y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定，证明
> $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$。
>
> 思路 命 $G(x,y,z)=F\left(x+\dfrac{z}{y}, y+\dfrac{z}{x}\right)$，以 F_1', F_2' 表示 G_x, G_y, G_z，代入即可。

§2.5.3 多元函数的微分的几何意义

一、多元函数的微分的几何意义 [1]

> 在解析几何中，一元函数的微分是函数在曲线上某点处的切线方程，A 表示切线的斜率，二元函数的全微分是切平面方程，A,B 是函数在 P_0 处的偏导数。
>
> 在可微曲面 $f(x,y)$ 的任意点 (x,y,f) 上作切平面，则在足够小的邻域内，切平面上的点 $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}f)$ 是曲面上点的近似。
>
> 对于一元函数 $f(x)$ 上的任意一点 $(x,f(x))$ 的法向量为 $\left(f'(x),-1\right)$。推广到二元函数，对于二元函数 $f(x,y)$ 上的任意一点 $(x,y,f(x,y))$ 的法向量，它在 ZOX 面的投影为 $(\frac{\partial f}{\partial x},-1)$，在 ZOY 面的投影为 $(\frac{\partial f}{\partial y},-1)$，可知在三维函数空间中的法向量 $\mathbf{N}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1)$。
>
> 又由于法向量与切向量 $\mathbf{T}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}f)$ 垂直，有
>
> $$\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+(-1)\mathrm{d}f=0$$
>
> 即全微分公式。
>
> 将 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}f$ 展开，
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)-(z-z_0)=0$$
>
> 即切平面的点法式方程。
>
> 再回看书上的这段话：

> > 二元函数 $f(x,y)$ 可以看成是三维空间中的曲面，令 $y=y_0$ 是得到一个一元函数 $f(x,y_0)$，这个一元函数可以看成曲面与 $y=y_0$ 平面的相交曲线。那么 $f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义就是相交曲线在 $x=x_0$ 处切线的斜率。

二、空间曲线的切线和法平面

思路 化参数式，求方向向量。

方法 设曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$，当 $t=t_0$ 时，点 P 的

- 坐标 $P\big(\varphi(t_0),\phi(t_0),\omega(t_0)\big)$；
- 方向向量 $\mathbf{T}=\big(\varphi'(t_0),\phi'(t_0),\omega'(t_0)\big)$；
- 切线方程 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$；
- 法平面 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$。

对于 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，设 x 为参数，并依隐函数求导法则求出 $\begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$，化归为上述情形。

> 当然亦可套公式：某点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的
>
> - 方向向量 $\mathbf{T}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$；
> - 切线方程 $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}$；
> - 法平面 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}=0$。

三、空间曲面的切平面和法线

思路 化一般式，求法向量。

方法 设曲线 $F(x,y,z)=0$，某点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的

- 法向量 $\mathbf{N}=(F_x,F_y,F_z)$；
- 切平面方程 $F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$；
- 法线方程 $\dfrac{x-x_0}{F_x}=\dfrac{y-y_0}{F_y}=\dfrac{z-z_0}{F_z}$。

对于 $z=f(x,y)$，设 $F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$（此时 $F_z=-1$），化归为上述情形。

§2.5.4 方向导数与梯度

> 对于二元函数，偏导数可以看成以 x 轴或 y 轴为法线且垂直于 xOy 的平面与二元函数曲面相交曲线的导数。事实上，垂直于 xOy 平面且与二元函数相交的平面不止这两种，方向导数解决了在 xOy 平面上任取一个向量，在 $\mathbb{R}^3$ 空间与这个向量平行的平面与二元函数的交线上任意一点的斜率。

方向导数 设二元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)\subset\mathbb{R}^2$，$l$ 为从点 P_0 出发的射线， P(x,y) 为 l 上且含于 U(P_0) 内的任一点，以 \rho 表示 P 于 P_0 两点间的距离。若极限 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta f}{\rho}$ 存在，则称此极限为函数 f 为点 P_0 沿方向 l 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$，$f_l(P_0)$ 或 $f_l(x_0,y_0)$。

若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则 f 在点 P_0 沿任一方向 f 的方向导数都存在，且

$$f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为方向 l 的方向余弦， $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$。

定理（方向导数与全微分的关系）：若函数 f 在点 P_0(x_0,y_0) 可微，那么所有过 P_0(x_0,y_0,z_0) 的切线共面，这个平面就是二元函数的切平面。

二元函数在点 P_0(x_0,y_0) 处可微，那么其关于自变量 x,y 的偏导数存在，这两个偏导数表示两条过 P_0(x_0,y_0,z_0) 的两条切线，这两条切线线性无关。由方向导数与偏导数之间的关系我们发现所有方向导数表示的切线都可以通过偏导数表示的切线线性表出，由线性代数的知识我们知道，这些方向导数表示的切线是共面的，这个平面就是切平面。

如果函数在一点可微，那么在该点处 360^{\circ} 的方向上，方向导数都存在，我们希望知道哪一个方向上的方向导数的最大，也即二元函数沿着该方向增长得最快，这个方向其实就是梯度。

若 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在对所有自变量的偏导数，则函数 f 在点 P_0 的梯度 (gradient)

$$\nabla f(x_0,y_0)=\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)=f_x(P_0)\mathbf{i}+f_y(P_0)\mathbf{j}=(f_x(P_0),f_y(P_0))$$

记 l 方向上的单位向量为 $\mathbf{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则方向导数还可写成

$$f_l(P_0)=\mathbf{grad}\, f(P_0)\cdot l_0=|\,\mathbf{grad}\, f(P_0)|\cos\theta$$

其中 θ 是梯度向量 $\mathbf{grad}\, f(P_0)$ 与 l_0 的夹角。

当 $\theta=0$ 时，$f_l(P_0)$ 取得最大值 $|\,\mathbf{grad}\, f(P_0)|$。这就是说，当 f 在点 P_0 可微时，f 在点 P_0 的梯度方向时 f 的值增长最快的方向，且沿这一方向的变化率为 $|\,\mathbf{grad}\, f(P_0)|$；而当 l 与梯度向量反方向 $(\theta=\pi)$ 时，方向导数取得最小值 $-|\,\mathbf{grad}\, f(P_0)|$。

几何意义 二元函数 $z=f(x,y)$ 与 $z=z_0$ 平面的交线称为等高线，向量 $\pm(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$ 是二元函数在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面的法线，梯度是二元函数在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处等高线的法线。

> (2022) 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数。
>
> 解 $\mathbf{grad}\, u=\left(y^2z,2xyz,xy^2\right),\mathbf{grad}\, u|_p=(2,-4,1)$。
>
> 增长最快的方向为梯度方向，即 $\mathbf{grad}\, u|_p=(2,-4,1)$，沿这个方向的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_p=|\,\mathbf{grad}\, u|=\sqrt{21}$；
> 减少最快的方向为负梯度方向，即 $-\mathbf{grad}\, u|_p=(-2,4,-1)$，沿这个方向的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_p=-|\,\mathbf{grad}\, u|=-\sqrt{21}$。

§2.5.5 多元函数的极值与最值

一、多元函数的无条件极值

必要条件 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极值且偏导存在，则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ 。

几何意义 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极值且偏导存在，则在 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 有水平切面，且 $\mathbf{N}=(f_x,f_y,-1)|_{P_0}=(0,0,-1)$，切平面方程 $z=f(x_0,y_0)$。

方法 为求 $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$，只需求驻点 $\nabla f=(f_x,f_y)=\mathbf{0}$。

充分条件 $z=f(x,y)$ 在 $U(P_0)$ 具有一阶及二阶连续偏导，$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ 。令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，

- $AC-B^2>0$，具有极值，其中 $A>0$ 极小，$A<0$ 极大
- $AC-B^2<0$，无法取得极值
- $AC-B^2=0$，无法确定

二、多元函数的无条件最值

类似一元，由极值点（驻点或偏导不存在）和边界点讨论最值。

三、多元函数的有条件极值

求 L 驻点→条件极值点：$L(x,y,\lambda)=\underset{\text{目标}}{f(x,y)}+\lambda\underset{\text{约束}}{\varphi(x,y)}$

> 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 间的最短距离。
>
> 代数法 设 (x,y,z) 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上一点，则它到平面 $x+y-2z=2$ 的距离为 $d=\dfrac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$。考虑目标函数 $d^2=\dfrac{(x+y-2z-2)^2}{6}$，作拉格朗日函数
>
> $$L(x,y,z)=\frac{(x+y-2z-2)^2}{6}+\lambda\left(x^2+y^2-z\right)$$

> 分别令 $L_x=0, L_y=0, L_z=0$，结合条件 $z=x^2+y^2$，解这个四元方程组得 $(x,y,z)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$。一方面，只有一个可能极值点；另一方面，从几何上知道，这个最短距离一定存在。所以点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$ 就是所求的最小值点，最短距离为
>
> $$d=\frac{\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{8}-2\right|}{\sqrt{6}}=\frac{7}{24}\sqrt{6}$$
>
> 几何法 设点 (x_0,y_0,z_0) 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上到平面 $x+y-2z=2$ 距离最短的点，则旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0,z_0)处的切平面必平行于平面 $x+y-2z=2$。因此，$z=x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面的法向量 $\mathbf{n}_1=(2x_0,2y_0,-1)$ 与 $(1,1,-2)$ 共线，解得 $x_0=\dfrac{1}{4}, y_0=\dfrac{1}{4}$，下同。

§0.2 公式区

§0.2.1 微积分

幂指对

$\int f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$	$f'(x)$
$\begin{cases}\dfrac{x^{k+1}}{k+1}+C, & \text{if } k\neq -1\\ \ln\lvert x\rvert+C, & \text{if } k=-1\end{cases}$	x^k	kx^{k-1}
$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	a^x	$a^x\ln a$
$\dfrac{1}{\ln a}x(\ln x-1)+C$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$

三角函数荟萃

$\int f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$	$f'(x)$
$-\cos x + C$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x + C$	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$	$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\ln\lvert\sec x\rvert + C = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\tan x$	$\sec^2 x$
$-\ln\lvert\csc x\rvert + C = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\frac{1}{4}(2x + \sin 2x) + C$	$\cos^2 x$	$-\sin 2x$
$\frac{1}{4}(2x - \sin 2x) + C$	$\sin^2 x$	$\sin 2x$
$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert + C$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

其它

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C = \operatorname{arcsinh} x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C = \operatorname{arcsinh} x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C = \operatorname{arctanh} x + C$$

点火公式（华里士公式，简称“华莱式”）

$$
\begin{array}{llll}
\text{ORG} & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x & = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x & = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ is odd.} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & n \text{ is even.} \end{cases} \\
\text{I} & \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n x \mathrm{d}x & = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x & = \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ is odd.} \\ 2 \cdot \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & n \text{ is even.} \end{cases} \\
\text{II} & \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x \mathrm{d}x & & = \begin{cases} 0 & n \text{ is odd.} \\ 2 \cdot \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & n \text{ is even.} \end{cases} \\
\text{III} & \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^n x \mathrm{d}x & = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n x \mathrm{d}x & = \begin{cases} 0 & n \text{ is odd.} \\ 4 \cdot \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & n \text{ is even.} \end{cases}
\end{array}
$$

高阶导数

$$
\text{[Leibniz formula]} \qquad \begin{aligned} (uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \\ &= uv^{(n)} + C_n^1 u^{'} v^{(n-1)} + \cdots + C_n^{n-1} u^{(n-1)} v^{'} + u^{(n)} v \end{aligned}
$$

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
a^x	$a^x \ln^n a$
e^x	e^x
x^μ	$\mu\,(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$
x^n	$n!$
x^{-1}	$(-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$
$\dfrac{1}{x+a}$	$\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$
$\mathbf{\dfrac{1}{kx+b}}$	$\mathbf{\dfrac{(-1)^n k^n n!}{(kx+b)^{n+1}}}$
$\log_a x$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$
$\ln(kx+b)$	$\dfrac{(-1)^{n-1} k^n (n-1)!}{(kx+b)^n}$
$\sin(kx+a)$	$k^n \sin\left(kx+a+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
$\cos(kx+a)$	$k^n \cos\left(kx+a+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

定积分

区间再现公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$

增强版区间再现公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)+f(a+b-x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)+f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

更强的区间再现公式：设 $f(x)$，$g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，若 $f(x)=f(a+b-x)$，$g(x)+g(a+b-x)=m$，其中 m 为常数，则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{m}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

扩展的定积分公式：

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sin x\right)\cdot\frac{b-a}{2}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^1 (b-a)f[a+(b-a)x]\mathrm{d}$$

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)+f(-x)\mathrm{d}x$$

1. 参考 https://zhuanlan.zhihu.com/p/90858099 ↩