陈伟老师押题卷

1. 化为标准方程：

$$
\begin{aligned}
y &= 3x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}, \\
\mathrm{d}y &= \frac{3}{2}(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x, \\
\mathrm{d}^2y &= \frac{3}{4}(-x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x^2 = \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}(x-1).
\end{aligned}
$$

   注意 $\mathrm{domain} = [0, +\infty)$，故拐点为 $(1, \pm 4)$． *（感谢 @Clearlove 指出了错误：极值点和驻点是横坐标，但是拐点是点）*

2. $\mathrm{domain} = \mathbb{R}/\{0\}$，且

$$
\lim_{x\to 0} y = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} y = 1.
$$

   故水平渐近线 $y = 1$，铅直渐近线 $x = 0$． *（感谢 @Hydrangea 指出了错误）*

3. B。

4. 设 $y = y(x)$，则

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\sin y}{y} + e^{-x} = \sin y + ye^{-x}, \\
0 &= \cos y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + e^{-x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - ye^{-x},
\end{aligned}
$$

   得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{ye^{-x}}{\cos y + e^{-x}}$.

   （以上是典型错误答案） *（感谢 @Hydrangea 指出了两个错误）*

   因为 $y = y(x)$，那么积分上限的函数是关于 x 的函数，求导时需稍作调整，

$$
0 = \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}},
$$

   那么 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{ye^{-x}}{2\sqrt{x}\sin y}$.

   评注：实际上使用了

$$
\boxed{\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) - f[\psi(x)] \cdot \psi'(x)}
$$

   这是积分上限函数的推广，可以从 $\text{Newton-Leibniz formula}$ 的角度理解（宋浩有讲）．

5. (1) 因为 $f(0^-) = f(0^+) = f(1^-) = +\infty$， $f(1^+) = -\infty$，故 $x = 0$ 和 $x = 1$ 都是无穷间断点．

   (2) 因为 $f(0^+) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$， $f(0^+) = -\frac{\pi}{2}$，故 $x = 0$ 是跳跃间断点． *（已修正不严谨的表述）*

6. 思路 $\mathbb{01}$（反证）：从略．

   思路 $\mathbb{02}$（中值定理）： $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上符合拉格日中值定理的条件，下不赘述．

There exists a point $\xi_1 \in (a, c)$, such that $f(c) - f(a) = f'(\xi_1)(c-a)$, then $f'(\xi_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} > 0$, there also exists a point $\xi_2 \in (c, b)$, such that $f'(\xi_2) < 0$，再在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上利用拉格朗日中值定理就可以找到 ξ 了。 *（感谢 @枝枝 提供的方法）*

思路 03（最值定理）：显然这段区间上存在最小值，那么最小值点的二阶导数…… 不能用这种方法做．极小值点的二阶导数不一定大于 0，而是大于等于 0，如 $y = x^4$．

7. 求出 $f'(x)$ 并代入，所求积分就是

$$\int \left(e^x + \csc x \cot x\right) \mathrm{d}x = e^x - \csc x + C$$

（感谢我自己指出了错误，注意 $+C$）

8. 发散；发散；收敛． *（感谢 @枝枝 指出了错误）*

评注：$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}$ 也是发散的，用定义易知．这个积分看上去等于 0，但广义积分不可以用定积分的奇偶巴拉巴拉方式做． *（感谢 @枝枝 的解答）*

9. （为了省事就不写 $\lim$ 了）

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x \sim \left(1 + \frac{-4}{x+3}\right)^x \sim e^{\frac{-4}{x+3} \cdot x} \sim e^{-4}$$

10. 题给 $f(1) = 0$ 规定可 L'H，结果是 $-f'(1)$．

11. 猜测是题目错了，我们求

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \mathrm{d}x \quad (b > a)$$

参考東麓的三角函数部分的第三条笔记，便有如下思路：

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\sin x}{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 x} \mathrm{d}x + \int \frac{\cos x}{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2} \mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{\mathrm{d} \cos x}{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d} \sin x}{b^2 - (b^2 - a^2) \sin^2 x} \\
&= -\frac{1}{a\sqrt{b^2 - a^2}} \arctan\left(\frac{1}{a}\sqrt{b^2 - a^2} \cos x\right) + \frac{1}{b\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{b - \sqrt{b^2 - a^2} \sin x} + C
\end{aligned}$$

这里使用了 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$．

（感谢我自己指出了错误\笑 $\displaystyle\int \sin x = -\cos x + C$，注意负号）

12. 为了把与积分变量无关的变量消掉，使用区间再现公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x e^{-(x-t)^2} \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t = e^{-x^2}$$

详细写是这样的：

$$\int_0^x e^{-(x-t)^2} dt$$

令 $t=x-u$，$dt=-du$，

$t=0$ 时，$u=x$，$t=x$ 时，$u=0$.

$$=\int_x^0 e^{-u^2} d(-u) \qquad \int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$=-\int_x^0 e^{-u^2} du$$

$$=\int_0^x e^{-u^2} du$$

$$\left(=\int_0^x e^{-t^2} dt\right)$$

评注：直接用 Newton-Leibniz formula 做答案是对的，不知道过程有没有问题.

13. 同上题的方法，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \int_0^t \sin s^2 \mathrm{d}s = \sin t^2, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^{-t^2} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^{t^2} \sin t^2 \\
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= 2te^{2t^2}
\end{aligned}$$

14. L'H 就完了！

$$\sim \frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}x + x^2 f(x)} \sim \frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}x + xf(x)} \sim \frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}$$

这时候不能再 L'H 了，否则出现 f'' 无法处理.

注意到 $\frac{f(x)}{x} \sim f'(0)$，作如下变形：

$$\sim \frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)}{x} + f'(x)} \sim \frac{4f'(0)}{3f'(0)+f'(0)} = 1$$