线性代数 Linear Algebra

您正在阅读的是 “ **精简版** ”，仅包括重要定义和定理，如果需要定理证明、典型例题习题或解题方法，请查看另一个文件.

写在前面

这是一本笔记.

基于王然老师在中国传媒大学通信工程专业的讲座，和同济大学数学科学学院编写的《工程数学 线性代数》（第七版）.

这本笔记是自己在学习中对于线代的一些不成熟的理解 ~ 我尝试将例题和习题与书本的定义定理相联系，纵向深入、横向拓展，厘清它的脉络. 此外，我尽可能地减少了大段文字叙述，取而代之的是分点叙述和富有建筑美的证明（嗯?

~~别再因为线代割腕了 /大笑!~~ 希望你们能从另一个视角感受线代的美，并享受这个令人惊叹的学科，祝愿你们在追寻人类历史上最伟大的智力冒险时一帆风顺!

在此特别感谢王然老师和我的班主任张莉老师 :D

最后，送每个读者一个四叶草🍀，祝期末考试顺利 ~

中国传媒大学
2023 级 小明同学
2023 年 12 月

一些说明

1. 本笔记仅适合作为复习资料，但是不建议作为预习资料. 切勿过于依赖本笔记.
2. 本笔记的格式和部分叙述具有强烈的个人习惯，若稍有不适，请立即停止阅读.
3. 本笔记允许自由转载，但仅可用于个人期末复习使用，不得用于任何商业用途.
4. 本笔记无偿提供给所有读者. 我们不会收取任何费用，谨防诈骗!
5. 本笔记将会持续更新，请添加 QQ 群或个人博客以获取更新信息.
6. 由于编写仓促，本笔记难免有少量错误，恳请广大读者批评指正.

联系方式

勘误、交流、提问、催更、~~闲聊~~、~~互赞~~......请联系：

交流群：*782175321*
博客：(搭建中)
QQ：*3135209339*
email：*cmg77@126.com*
匿名提问箱：*小茗·可比克专卖店的提问箱 (https://www.askbox.ink/box/uu/DHPONQF7?uid=69e68fd831b7284904aa42b596e33c7d)*

更新历史

5.0.0　2024 年 01 月 08 日　最终版．撒花！
4.0.0　2024 年 01 月 07 日　新增第二、三章．核心内容完结！
3.0.0　2023 年 12 月 25 日　口语考试结束！新增第一章．
2.0.2　2023 年 12 月 21 日　勘误．
2.0.1　2023 年 12 月 16 日　$\LaTeX$ 格式修订，将 $\leq$ 修改为 $\leqslant$，将 A^T 修改为 A^{T}，将 diag 修改为 diag，将“。”修改为“．”．
2.0.0　2023 年 12 月 12 日　新增第五章，完善第四章剩余的内容．
1.1.0　2023 年 12 月 11 日　增补少量内容．修改了前言．
1.0.0　2023 年 12 月 07 日　发布．

目录

第〇章　线性方程组

> 线性方程组贯穿于整个线性代数，是线性代数的重要内容，主要包括线性方程的有解判别准则、求解方法和解的结构．因此，我们单独将其列为一章．

0.1　非齐次线性方程组和齐次线性方程组

$\boldsymbol{n}$ 元线性方程组 设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$，当常数项 $\sum b_i^2\neq 0$ 时，称该方程组为 n 元非齐次线性方程组，否则称为 n 元齐次线性方程组．

非齐次线性方程组的系数矩阵、未知数矩阵和常数项矩阵、增广矩阵．

0.2　克拉默法则

克拉默法则 如果线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots=b_n \end{cases}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不等于零，即 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则该方程组有惟一解 $x_i=\dfrac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|}$，其中 $\boldsymbol{A}_i=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

0.3　线性方程组解的判定

$\boldsymbol{n}$ 元齐次线性方程组解的判定 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 解的情况如下：

- 有非零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<n$，即 $|\boldsymbol{A}|=0$
- 只有零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$，即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

$\boldsymbol{n}$ 元非齐次线性方程组解的判定 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的情况如下：

- 无解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$
- 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，其中
  - 有惟一解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$
  - 有无穷多解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$

矩阵方程解的判定 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 解的情况如下：

- 无解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$
- 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$

0.4　利用基础解系求解线性方程组

【$\mathscr{Thm\,4.7}$】设 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=r$，齐次线性方程组的解空间 $S=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}\}$ 的一个基称为 **基础解系**．进而，解空间可表示为 $S=\{c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}\mid c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}\in\mathbb{R}\}$，即 $\dim S=n-r$．而非齐次线性方程组的解集不是向量空间．

第一章 行列式

本章所有证明从略，部分定义（已加粗）从略，请参见课本.

1.1 行列式的定义

【$\mathscr{Def}\,1.1$】设 n 个元素为 1 到 n 这 n 个自然数，并规定由大到小为标准次序. 设 $p_1p_2\dots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，$p_i(i=1,2,\dots,n)$ 这个元素的 **逆序数** 是比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素个数 t_i. 整个排列的逆序数 $t(p_1p_2\dots p_n)=\sum_{t=1}^{n}t_i$. 若排列的逆序数是一个偶数，则称之为 **偶排列**；若是奇数，则称之为 **奇排列**.

*【$\mathscr{Thm}\,1.1$】**对换** 改变排列的奇偶性. 排列经过奇数次对换其奇偶性发生改变，经过偶数次对换其奇偶性不变. 当 $n\geq 2$ 时，在 n 阶排列中，奇偶排列数目相等，即各有 $\frac{n!}{2}$ 个.*

【$\mathscr{Def}\,1.2$】n **阶行列式**：$A=\det(a_{ij})=\sum_{(p_1,\cdots,p_n)\in S_n}(-1)^{t(p_1,\cdots,p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$.

1.2 行列式的性质和计算方法之一

1. **上(下)三角行列式** 和 **对角行列式** 的值等于其 **主对角线** 上元素之积.

   而 *副对角的上(下)三角行列式* 和 *副对角行列式* 的值除了 **副对角线** 上元素之积外，需乘上 $(-1)^{t(n(n-1)\dots 1)}=(-1)^{C_n^2}$.
2. $A=A^{\mathrm{T}}$（**转置**），值不变. 这表明，行列式的行和列地位同等.
3. $r_i\leftrightarrow r_j$（对换两行），值变号.

   推论：某一行全为零，值等于零.
4. $r_i\times k$（某一行乘常数），值 $\times k$（乘这个常数）.

   推论：某两行成比例，值等于零.
5. r_j+kr_i（某一行乘常数后加到另一行上去），值不变.
6. 分解，如：$\begin{vmatrix}a+x & c+z\\ b+y & d+w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & c+z\\ b & d+w\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a+x & c\\ b+y & d\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & z\\ y & w\end{vmatrix}$

我们总能利用上述性质 5 将行列式化为上三角行列式，从而利用性质 1 计算出行列式的值.

1.3 行列式的逆归定义（按行(列)展开法则）和计算方法之二

元素 a_{ij} 的 **余子式** M_{ij}：由行列式 A 中划去第 i 行 j 列后剩下的 $n-1$ 阶行列式.

元素 a_{ij} 的 **代数余子式** $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

【$\mathscr{Thm}\,1.2$】行列式按行(列)展开法则：$A=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik},1\leqslant i\leqslant n$，以及 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0,i\neq j$. 合起来即 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=A\delta_{ij}$，其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

通过从某一行或某一列将行列式展开可以减低行列式的阶数，但如果不进行一定的初等变换会计算多个行列式并不能简化计算，所以在展开行列式时应当先进行一定的化简.

1.4 例题

> *这一节分两部分：第一部分介绍了一些特殊行列式的求法，如范德蒙德行列式、箭形行列式；第二部分是一般行列式的求值方法.*
> *考虑到咱们学习的是工科数学以及本笔记的功能，此部分从略.*
> *有兴趣的读者可以 [联系我们](#) 获取 ~*

第二章　矩阵（上）

2.1　矩阵

【$\mathscr{Def}\ 2.1$】**矩阵** 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表称为 $m\times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中 a_{ij} 称为矩阵的 (m,n) 元.

同型矩阵 两个矩阵的行数相等、列数相等时.

相等矩阵 对应元素相等的同型矩阵.

实(复)矩阵 元素是实(复)数的矩阵.

零矩阵 元素全为零的矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$. 不同型的零矩阵不相等.

行(列)矩阵 只有一行(列)的矩阵，也称行(列)向量.

n **阶方阵** 当 $m=n$ 时的矩阵，即 $n\times n$ 矩阵.

对角矩阵 主对角线的元素不全为 0，且除主对角线之外其他元素都为 0 的方阵，记作
$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n)$.

纯量矩阵 对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda,\ \lambda,\ \dots,\ \lambda)$.

单位矩阵 对角矩阵 $\mathrm{diag}(1,\ 1,\ \dots,\ 1)$ 叫做 n 阶单位矩阵，记作 $\boldsymbol{E}_n$.

2.2　矩阵的运算

【$\mathscr{Def}\ 2.5$】**矩阵转置** 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的转置矩阵为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$. 矩阵转置满足对加法的分配律，以及 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

【$\mathscr{Def}\ 2.2$】**矩阵加法** 同型矩阵的对应元素相加. 矩阵加法满足交换律和结合律. 另定义 **负矩阵** 和 **矩阵减法**.

【$\mathscr{Def}\ 2.3$】**矩阵数乘** 对矩阵的每个元素作乘法. 矩阵数乘满足结合律、对数的分配律和对矩阵的分配律.

【$\mathscr{Def}\ 2.4$】**矩阵乘法** 对于 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ ，它们的乘法定义为
$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$ ，其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$. 矩阵乘法满足结合律和对矩阵的分配律. 值得注意的是，它一般并不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

此外，矩阵乘法一般不满足消去律；两个矩阵的乘积如果是零矩阵，这两个矩阵不一定是零矩阵，也即如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，不一定能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

> 这里给出两个特例：
>
> - 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.　(例 2.19)
> - 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{B}$ 是列满秩矩阵，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.　(例 3.9)

行向量与列向量的相乘是一个数（即一阶矩阵），列向量与行向量的乘积是一个矩阵.

【$\mathscr{Def}\ 2.6$】**方阵的行列式** n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 是由方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式. 方阵的行列式满足：$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$, $\boxed{|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|}$, $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，推论有 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$, $|\boldsymbol{A}^k|=|\boldsymbol{A}|^k$.

2.3 伴随矩阵和逆矩阵

伴随矩阵 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

.

【$\mathscr{Def}\ 2.7$】**矩阵的逆** 六种等价表述：n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，也就是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{B}_{n\times n},\ \text{s.t. } \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E} && (\text{定义}) \\
&\Longleftrightarrow \quad |\boldsymbol{A}| \neq 0 && (\text{非奇异}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{E} && (\text{与单位阵等价}) \\
&\Longleftrightarrow \quad R(\boldsymbol{A}) = n && (\text{满秩})
\end{aligned}
$$

方阵 $\boldsymbol{A}$ 和它的伴随矩阵、逆矩阵（如果存在）满足

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A} \\
&(2)\quad (\lambda\boldsymbol{A})^{-1} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \\
&(3)\quad (\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \\
&(4)\quad \boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} \\
&(5)\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* \\
&(6)\quad \boxed{(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}} \\
&(7)\quad \boxed{|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}}
\end{aligned}
$$

特殊矩阵的逆

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&\boldsymbol{E}^{-1} = \boldsymbol{E} \\
&\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \Rightarrow \boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots \lambda_n^{-1})
\end{aligned}
$$

第三章　矩阵（下）

3.1　矩阵的初等变换

【$\mathscr{Def}\,3.1$】**矩阵的初等行变换**：

- $r_i \leftrightarrow r_j$（对调两行）
- $r_i \times k \ \ (k \neq 0)$（以某数乘某一行中的所有元素）
- $r_i + kr_j$（把某一行所有元素乘某个数再加到另一行对应的元素上去）

把行换成列称为矩阵的初等列变换，它们二者均是初等变换.

【$\mathscr{Thm}\,3.1$】经过初等变换的矩阵便不再是原来的矩阵，但新矩阵与原矩阵 **等价**，记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. 矩阵等价满足反身性、对称性、传递性．设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵，那么

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B} \iff \exists \boldsymbol{P} = (p_{ij})_{m\times m},\ |\boldsymbol{P}| \neq 0\ \ s.t.\ \ \boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B} \\
&\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B} \iff \exists \boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{n\times n},\ |\boldsymbol{Q}| \neq 0\ \ s.t.\ \ \boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{B} \\
&\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \iff \exists \boldsymbol{P} = (p_{ij})_{m\times m},\ \boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{n\times n},\ |\boldsymbol{P}| \neq 0,\ |\boldsymbol{Q}| \neq 0\ \ s.t.\ \ \boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

【$\mathscr{Def}\,3.2$】任意 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 都与 **行阶梯形矩阵**、**行最简形矩阵** 行等价，与 **标准形** $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E_r} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ 等价.

【$\mathscr{Def}\,3.3$】**初等矩阵** 对矩阵的初等行(列)变换可以看成左(右)乘一个特殊矩阵，而这六种初等变换对应的三种特殊矩阵就称为 初等矩阵．初等矩阵指的是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经一次初等变换得到的矩阵，分别记作 $\boldsymbol{E}_{ij}$，$\boldsymbol{E}_i(k)$，$\boldsymbol{E}_{ij}(k)$．其逆阵显然也是初等矩阵，且 $\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$，$\boldsymbol{E}_i^{-1} = \boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k})$，$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k) = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$．初等矩阵的行列式均等于 1．对 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ ，作一次初等行(列)变换，等价于一个对应的 $m(n)$ 阶初等矩阵左(右)乘矩阵 $\boldsymbol{A}$.

3.2　矩阵的秩

【$\mathscr{Def}\,3.4$】**子式** 在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 k 行 k 列，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式.

【$\mathscr{Def}\,3.5$】**秩** 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在一个不为零的 r 阶子式，且所有 $r+1$ 阶子式全为零，那么数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})$，简言之，即矩阵的最高阶非零子式的阶数，也即非零子式的最高阶数．规定零矩阵的秩为 0.

矩阵的秩的性质：

$$\begin{aligned}
&(1)\ R(\boldsymbol{E}_n) = n \\
&(2)\ 0 \leqslant R(\boldsymbol{A}_{m\times n}) \leqslant \min\{m, n\} \\
&(3)\ R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{A}) \\
&(4)\ \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Longrightarrow R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) \\
&(5)\ |\boldsymbol{P}| \neq 0,\ |\boldsymbol{Q}| \neq 0 \Longrightarrow R(\boldsymbol{PAQ}) = R(\boldsymbol{A}) \\
&(6)\ \max\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\} \leqslant R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \\
&(7)\ R(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \\
&(8)\ R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\} \\
&(9)\ \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l} = \boldsymbol{O} \Longrightarrow R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \leqslant n
\end{aligned}$$

第四章 向量组

4.1 向量组

【$\mathscr{Def}\,4.1$】n **维向量**： n 个有次序的数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 所组成的数组 $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ，其中的数 a_i 称为向量的第 i 个 **分量**．**向量组**：若干个同 **维数** 的列向量或行向量所组成的集合．

1. 只讨论实向量，即分量全为实数的向量，另有复向量．
2. n 维行向量和 n 维列向量总被看作是两个不同的向量，当没有明确说明是行向量还是列向量时，都当作列向量；
3. 行向量和列向量都按照矩阵的运算法则进行运算；
4. 含有限个向量的有序向量组可以与矩阵一一对应．

4.2 向量组的外部关系

【$\mathscr{Def}\,4.1$】【$\mathscr{Def}\,4.2$】【$\mathscr{Thm}\,4.1$】给定向量 b 和向量组 $A: a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，定义 **线性组合** 和 **线性表示**：

$$
\begin{aligned}
&\text{向量}b\text{是向量组}A\text{的线性组合}\\
\iff&\text{向量}b\text{能由向量组}A\text{线性表示}\\
\iff&\exists k_1, k_2, \ldots, k_n,\quad \text{s.t.}\quad b=k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n\\
\iff&AX=b\text{有解}\\
\iff&R(A)=R(A,b)
\end{aligned}
$$

1. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 为任意一组实数，称为这个线性组合的 **系数**．
2. 零向量是任何一组向量的线性组合．
3. 向量组中的任一向量 a_i 都是此向量组的线性组合．

【$\mathscr{Def}\,4.3$】【$\mathscr{Thm}\,4.2$】【$\mathscr{Thm}\,4.3$】定义两向量组的 **线性表示**：

$$
\begin{aligned}
&\text{向量组}B\text{能由向量组}A\text{线性表示}\\
\iff&\text{向量组}B\text{中每个向量都能由向量组}A\text{线性表示}\\
\iff&\exists K,\quad \text{s.t.}\quad B=AK\\
\iff&AX=B\text{有解}\\
\iff&R(A,B)=R(A)\geq R(B)
\end{aligned}
$$

并定义两向量组 **等价**：

$$
\begin{aligned}
&\text{向量组}A\text{与向量组}B\text{等价}\\
\iff&A\text{组中每个向量能由}B\text{组线性表示}\vee B\text{组中每个向量都能由}A\text{组线性表示}\\
\iff&A\text{组和}B\text{组能相互线性表示}\\
\iff&\exists\text{可逆阵}K,\quad \text{s.t.}\quad B=AK\\
\iff&R(A,B)=R(A)=R(B)
\end{aligned}
$$

1. 向量组 A 与向量组 B **行(列)等价**：向量组 A 的行(列)向量组与向量组 B 的行(列)向量组能相互线性表示（等价）．
2. 线性表示的 **系数矩阵**：若 $C=AB$ ，则矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示， B 为这一表示的系数矩阵；同时，矩阵 C 的行向量组能由矩阵 B 的行向量组线性表示， A 为这一表示的系数矩阵．（这再一次体现了行左列右）

n **维单位坐标向量**： n 维单位矩阵 $E=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ 的列向量．

【命题】任何一个 n 维向量都可以由 n 维单位坐标向量组线性表示．

4.3 向量组的内部关系

【$\mathscr{Def}\,4.4$】【$\mathscr{Thm}\,4.4$】定义向量组的 **线性相关** 和 **线性无关**:

$$
\begin{aligned}
&\text{向量组}A: a_1, a_2, \ldots, a_n\text{线性相关} \\
\iff &\exists k_1, k_2, \ldots, k_n \left(\prod k_i \neq 0\right), \quad \text{s.t.} \quad k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n = 0 \\
\iff &\exists k_1, k_2, \ldots, k_n \left(\prod k_i \neq 0\right), \quad \text{s.t.} \quad Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0 \\
\iff &Ax = 0\text{有非零解} \\
\iff &R(A) < n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{向量组}A: a_1, a_2, \ldots, a_n\text{线性无关} \\
\iff &\forall k_1, k_2, \ldots, k_n \left(\prod k_i \neq 0\right), \quad k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n \neq 0 \\
\iff &Ax = 0\text{有且仅有零解} \\
\iff &R(A) = n
\end{aligned}
$$

1. 线性相关通常对 $n \geq 2$ 而言.

   但 $n = 1$ 时定义同样适用，即当 $a = 0$ 时，线性相关；当 $a \neq 0$ 时，线性无关.
2. 当 $n = 2$ 时，a_1, a_2 线性相关 $\iff$ a_1, a_2 对应分量成比例（$\iff$ a_1, a_2 共线）.
3. 零向量线性相关，包含零向量的向量组线性相关.
4. n 维单位坐标向量组 E 线性无关.

【命题】 向量组 $A: a_1, a_2, \ldots, a_n (n \geq 2)$ 线性相关 $\iff$ 至少有一个向量可以由剩下的 $n-1$ 个向量线性表示.

【$\mathscr{Thm}\,4.5.1.1$】（部分有 $\Rightarrow$ 整体有）$A_0: a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性相关
$\Rightarrow A: a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1} \ldots, a_n$ 线性相关
（整体无 $\Rightarrow$ 部分无）$A: a_1, a_2, \ldots, a_n$ 线性无关 $\Rightarrow A_0: a_1, a_2, \ldots, a_r (r \leqslant n)$ 线性无关

【$\mathscr{Thm}\,4.5.2$】当 $m > n$ 时，m 个 n 维向量 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关．特别地 $n+1$ 个 n 维向量线性相关.

【$\mathscr{Thm}\,4.5.3$】（添加的关系）设 $A: a_1, a_2, \ldots, a_n$ 线性无关，$B: a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ 线性相关，则 b 可以由 A 线性表示，且表达式惟一.

4.4 向量组的秩和最大无关组

考虑无限多个向量．将向量组定义中向量个数的有限性去掉，推广相关定理，以向量组的最大无关组过渡.

【$\mathscr{Def}\,4.5$】称向量组 A 的一个部分组 A_0 为向量组 A 的 **最大线性无关组（最大无关组）**，当:

向量组 A 中的 r 个向量构成的向量组 A_0 满足:
(1) 向量组 A_0 线性无关;
(2) A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

或

向量组 A 的一个部分组 A_0 满足:
(1) 向量组 A_0 线性无关;
(2) 向量组 A 中的任一向量都由 A_0 线性表示.

以上两种表述等价.

向量组 A 的 **秩**: 最大无关组 A_0 的向量个数 r ,因此不同的最大无关组中包含的向量个数相同.

1. 规定:只含零向量的向量组没有最大无关组,它的秩为 0 .
2. 向量组的最大无关组一般不惟一.
3. 线性无关的向量组的最大无关组是其本身.
4. 向量组的最大无关组与原向量组等价,借此把无限化为有限的问题.

【$\mathscr{Thm\,4.6}$】矩阵的秩等于它的 **行秩**,也等于它的 **列秩**.

推论:设矩阵 A 的某个 r 阶子式 D_r 是 A 的最高阶非零子式,则 D_r 所在的 r 个行向量即是 A 的行向量组的一个最大无关组;D_r 所在的 r 个列向量即是 A 的列向量组的一个最大无关组.

4.5 向量空间

【$\mathscr{Def\,4.6}$】集合 V 为 **向量空间**,当满足:(1) V 为 n 维向量的集合;(2) V 非空;(3) V 对于加法和数乘两种运算封闭.

n 维向量空间 $\mathbb{R}^n=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$.

n 维向量空间中的 $n-1$ 维超平面:
$\pi=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b\right\}$.

【$\mathscr{Def\,4.7}$】V_1 是 V_2 的 **子空间**,当 $V_1\subseteq V_2$.

【$\mathscr{Def\,4.8}$】向量组 $a_1,a_2,\ldots,a_r$ 为向量空间 V 的一个 **基**(即最大无关组),当满足:(1) 向量 $a_1,a_2,\ldots,a_r\in V$;(2) $a_1,a_2,\ldots,a_r$ 线性无关;(3) V 中任一向量都可由 $a_1,a_2,\ldots,a_r$ 线性表示.

$\mathbb{R}^n$ 中的 **自然基**: $e_1,e_2,\ldots,e_n$.

向量空间的 **维数**(即秩): $\dim V=r$,并称 V 是 r 维向量空间. 没有基的向量空间,即 0 维向量空间的维数为 0.

【$\mathscr{Def\,4.9}$】 V 中的任意向量 x 在基 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 下的 **坐标** 是 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)^{\mathrm{T}}$: 将 x 表示为 $x=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\lambda$. 由基 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 所张(生)成的向量空间 $\mathrm{Span}\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ 是 $V=\{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n\mid\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}\}$.

【$\mathscr{Def\,4.10}$】称 P 是向量空间 V 中的基 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 到基 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 的 **过渡矩阵**: 若 $(b_1,b_2,\ldots,b_n)=(a_1,a_2,\ldots,a_n)P$,此即 **基变换公式**.

【$\mathscr{Def\,4.11}$】设向量空间 V 中的向量 a 在基 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 中的坐标为 x,在基 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 中的坐标为 y,则 $x=Py$,此即 **坐标变换公式**.

第五章　相似矩阵及二次型

5.1　向量的内积、范数

【$\mathscr{Def}\,5.1$】n 维列向量 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\mathrm{T}},y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 的 **内积**：$(x,y)=x^{\mathrm{T}}y=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$.

1. 内积满足交换律和线性运算.
2. 当 $x=0$ 时，$(x,x)=0$；当 $x\neq 0$ 时，$(x,x)>0$.
3. （施瓦兹不等式）$(x,y)^2\leqslant(x,x)(y,y)$.

【$\mathscr{Def}\,5.2$】向量 x 的 **范数** $||x||=\sqrt{(x,x)}$. 向量 x 和 y 的 **夹角** $\theta=\arccos\frac{(x,y)}{||x||\cdot||y||}$.

5.2　向量的正交性

向量 x 和 y **正交**：$(x,y)=0$.

【$\mathscr{Thm}\,5.1$】正交向量组线性无关.

【$\mathscr{Def}\,5.3$】**标准正交基** $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$：单位向量、两两正交、向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个基.

1. 向量空间中任一向量可表示为 $a=\sum\lambda_i\xi_i$，它在标准正交基下的坐标计算公式：$\lambda_i=(a,\xi_i)$.
2. 把向量空间的一个基 **标准正交化**：找到标准正交基与之等价，可先施密特正交化，再单位化.

   施密特正交化：

$$
\begin{aligned}
b_1&=a_1,\\
b_2&=a_2-\frac{(b_1,a_2)}{||b_1||}b_1,\\
b_3&=a_3-\frac{(b_1,a_3)}{||b_1||}b_1-\frac{(b_2,a_3)}{||b_2||}b_2\\
&\cdots\\
b_n&=a_n-\frac{(a_n,b_1)}{||b_1||}b_1-\cdots-\frac{(a_n,b_{n-1})}{||b_{n-1}||}b_{n-1}
\end{aligned}
$$

   单位化：

$$
\xi_i=\frac{b_i}{||b_i||},\quad 1\leqslant i\leqslant n
$$

【$\mathscr{Def}\,5.4$】**正交阵**：$A^{\mathrm{T}}A=E\iff A^{-1}=A^{\mathrm{T}}\iff(a_i,a_j)=\delta_{ij}\iff A$ 的列(行)向量组构成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.

1. 正交阵的逆或转置仍是正交阵，它的行列式只能为 ±1.
2. 两个正交阵的积仍是正交阵.

【$\mathscr{Def}\,5.4$】**正交变换**：$y=Px$，其中 P 为正交阵. 性质：$||y||=||x||$.

5.3　特征值和特征向量

矩阵 A 是 **方阵**，如果 **非零列向量** x 满足 $Ax=\lambda x$，则称其为 **特征向量**，$\lambda=\frac{Ax}{x}$ 为 **特征值**. *（$\mathscr{Def}\,5.6$）*

1. n 阶方阵在复数范围内有 n 个特征值.

   (1) 所有特征值之和等于方阵的 **迹**（trace，$\mathrm{tr}(A)=\sum a_{ii}$）.

(2) 所有特征值之积等于方阵的行列式.

推论：如果这些特征值都不为 0，那么这个方阵可逆.

2. 对方阵作多项式，她的特征值也对应作多项式，而对应于特征值的特征向量不变.

   对方阵作转置，她的特征值不变（也可以理解为一阶行列式作转置），而特征向量需要另算.

3. 对应于不同特征值的特征向量线性无关． *(Thm 5.2)*

   推论：对应于两个不同特征值的线性无关的特征向量组，合起来仍线性无关． *(Thm 5.2 推论)*

4. 不同特征值对应特征向量的线性组合不是特征向量.

5.4 对角化

5.4.1 一般矩阵的相似对角化

相似：矩阵 B 是矩阵 A 的 **相似矩阵**，或矩阵 A 与 B 相似，即 $P^{-1}AP=B$. 对 A 进行 $P^{-1}AP$ 运算称为对 A 进行 **相似变换**，可逆矩阵 P 称为把 A 变成 B 的 **相似变换矩阵**． *(Def 5.7)*

1. 相似是特殊的等价，因此相似矩阵的秩相同.
2. 相似矩阵的特征多项式、特征值都相同，因此行列式相同． *(Thm 5.3)*

相似对角化：对 n 阶方阵 A，寻求相似变换矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵.

【条件】A 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftarrow$ A 的 n 个特征值互不相等． *(Thm 5.4)*

【意义】计算矩阵多项式 $\varphi(A)=P^{-1}\varphi(\Lambda)P=P^{-1}\prod_{i=1}^{n}\varphi(\lambda_i)P$. *(例 5.13)*

5.4.2 合同对角化

合同：n 阶矩阵 A 和 B 合同，若有可逆矩阵 C，使 $B=C^{\mathrm{T}}AC$.

合同对角化：对 n 阶方阵 A，寻找合同变换矩阵 P，使 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$ 为对角矩阵.

5.4.3 对称矩阵的正交对角化

对称矩阵：$A^{\mathrm{T}}=A$.

1. 对称矩阵的特征值都是实数，故齐次线性方程组是实系数的，从而对应的特征向量可以取实向量；
2. 对称矩阵的对应不同特征值的特征向量正交（比线性无关更强）.
3. n 阶对称矩阵 A 的特征方程有 k 重根 λ，则 $R(A-\lambda E)=n-k$，从而对应特征值 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量.

【定理】实对称矩阵必可正交对角化． *(Thm 5.5)*

5.5 对角化的应用举隅——二次型的标准化

二次型：设 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$，二次齐次函数 $f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^{\mathrm{T}}Ax$，其中 $A=(a_{ij})$ 称为 **二次型的矩阵**.

二次型的秩：$r=R(A)\leqslant n$.

5.5.1 二次型的标准化

二次型的标准化：二次型必可经正交变换 $x=Py$ 化为 **标准型**（只含平方项的二次型）$f=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iy_i^2$，其中 λ_i 是二次型的矩阵的特征值，P 是合同对角化得到的正交阵． *(Thm 5.6)*

二次型的规范化：二次型必可经可逆变换 $x=Cy$ 化为 **规范型**（是标准型，且系数满足 $k_i\in\{-1,0,1\}$） $f=\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}y_i^2$，其中 $C=PK$，$K=\mathrm{diag}(k_i)$，$k_i=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i\leqslant r\\ 1, & i>r\end{cases}$. *（Thm 5.6 推论）*

5.5.2 判定二次型正负定性

称二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为 **正(负)定二次型**，或称对称矩阵 A 是 **正(负)定** 的，如果 $\forall x\neq 0,\ \ f(x)>0\ (<0)$.

判定二次型正负定性：

- **定　　义**：正定 $\iff$ $\forall x\neq 0,\ \ f(x)>0$;
  负定 $\iff$ $\forall x\neq 0,\ \ f(x)<0$.
- **惯性指数**：正定 $\iff$ 标准形的系数全都为正 $\iff$ 规范形的系数全都为 1 $\iff$ 正惯性指数为 n. 二次型的 **正(负)惯性指数** 为标准形中正(负)系数个数. 它的数量是确定的，此即 **惯性定理**. 正惯性指数与负惯性指数的和等于二次型的秩. *（Thm 5.7&8）*
- **矩阵特征值**：正定 $\iff$ 二次型的矩阵特征值全为正. *（Thm 5.8 推论）*
- **顺序主子式**：正定 $\iff$ 二次型的矩阵各阶顺序主子式全为正; *（Thm 5.9，赫尔维茨定理）*
  负定 $\iff$ 偶数阶顺序主子式为正，而奇数阶顺序主子式为负.

写在最后

以上就是本书的全部知识点!

完结撒花!

写到这里时已经是 Week15 的周末，线代仅剩最后的 3 次课......

真的很喜欢王然老师，他的魅力是其它任何一个老师都望尘莫及的（~~个人观点~~）. 在开学之初我也是讨厌数学的，也为学不懂线代和高数而苦恼. 但是在几次课之后对线代产生了极大的兴趣，放弃了宋浩，开始认真听每一节线代课，尝试仔细研读课本，甚至补充了一些著作和文献...... 这才有了这份笔记. 可以说线代是我这学期惟一主动听的课. 有次起晚了为了不迟到，10 分钟从宿舍飞到教室，89 秒冲上 7 楼，甚至创下了新纪录.

不知道该用什么形容词了，总之就是特别好特别好! 就像是高一上学期的神仙老师们那么好! ! !

（这里补充对王然老师的一封感谢信，在结课后补上）

最后再放一个 **线代吉祥物 "线 '性' 小狗"** 吧，很可爱捏!

小明同学
2023 年 12 月 15 日